INSTRUMENTAÇÃO NUCLEAR

ESTATÍSTICA DE CONTAGEM
E
ESTIMATIVA DE ERRO

Princípio

➔Decaimento radioativo é um processo aleatório, portanto sua medida está sujeita à flutuação estatística.

➔Esta flutuação é um fonte de incerteza.

➔Estatística de contagem serve para duas finalidades:

1. Verificar se o funcionamento de equipamento está normal.
2. Estimar a incerteza associada à medida.

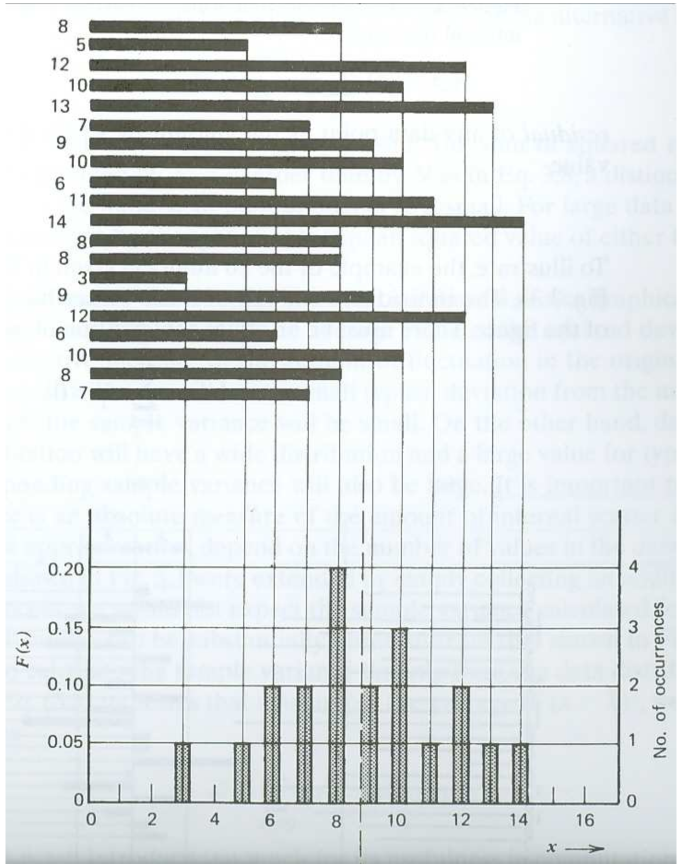
Caracterização de dados

Dados: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ sendo x_i valores inteiros

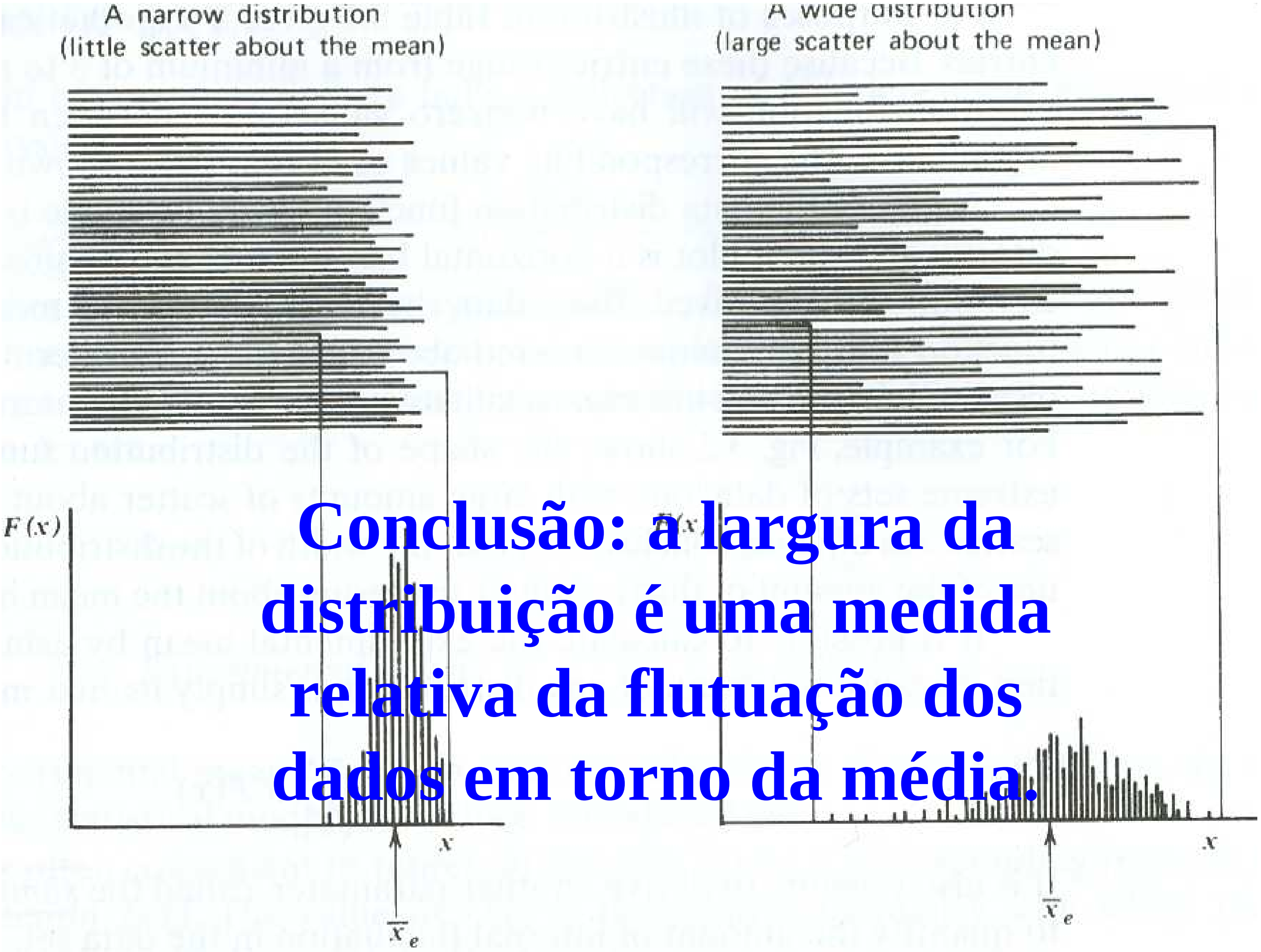
Média experimental: $\overline{x_e} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Freqüência: $F(x) = \dfrac{n^o\,de\ ocorrências}{N}$

Data		Frequency Distribution Function
8	14	$F(3) = 1/20 = 0.05$
5	8	$F(4) = 0$
2	8	$F(5) = 0.05$
0	3	$F(6) = 0.10$
3	9	$F(7) = 0.10$
7	12	$F(8) = 0.20$
9	6	$F(9) = 0.10$
0	10	$F(10) = 0.15$
6	8	$F(11) = 0.05$
1	7	$F(12) = 0.10$
		$F(13) = 0.05$
		$F(14) = 0.05$
		$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1.00$



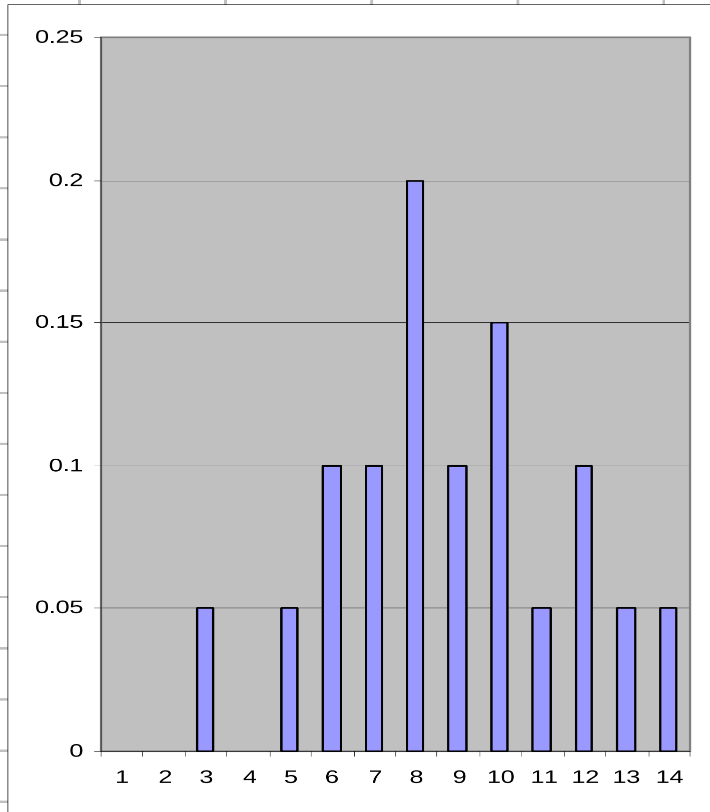
Dois conjuntos de dados



Conclusão: a largura da distribuição é uma medida relativa da flutuação dos dados em torno da média.

Caracterização de dados

Dados	Valores	Ocorrência	Frequência	Val.*Freq.
8	1	0	0	0
5	2	0	0	0
12	3	1	0.05	0.15
10	4	0	0	0
13	5	1	0.05	0.25
7	6	2	0.1	0.6
9	7	2	0.1	0.7
10	8	4	0.2	1.6
6	9	2	0.1	0.9
11	10	3	0.15	1.5
14	11	1	0.05	0.55
8	12	2	0.1	1.2
8	13	1	0.05	0.65
3	14	1	0.05	0.7
9		0		
12				
6				
10				
8				
7				
média			soma	soma
8.8			1	8.8



$$\overline{x_e} = \sum_{x=0}^{\infty} x\, F(x)$$

Variância

Média do quadrado do desvio de cada ponto.

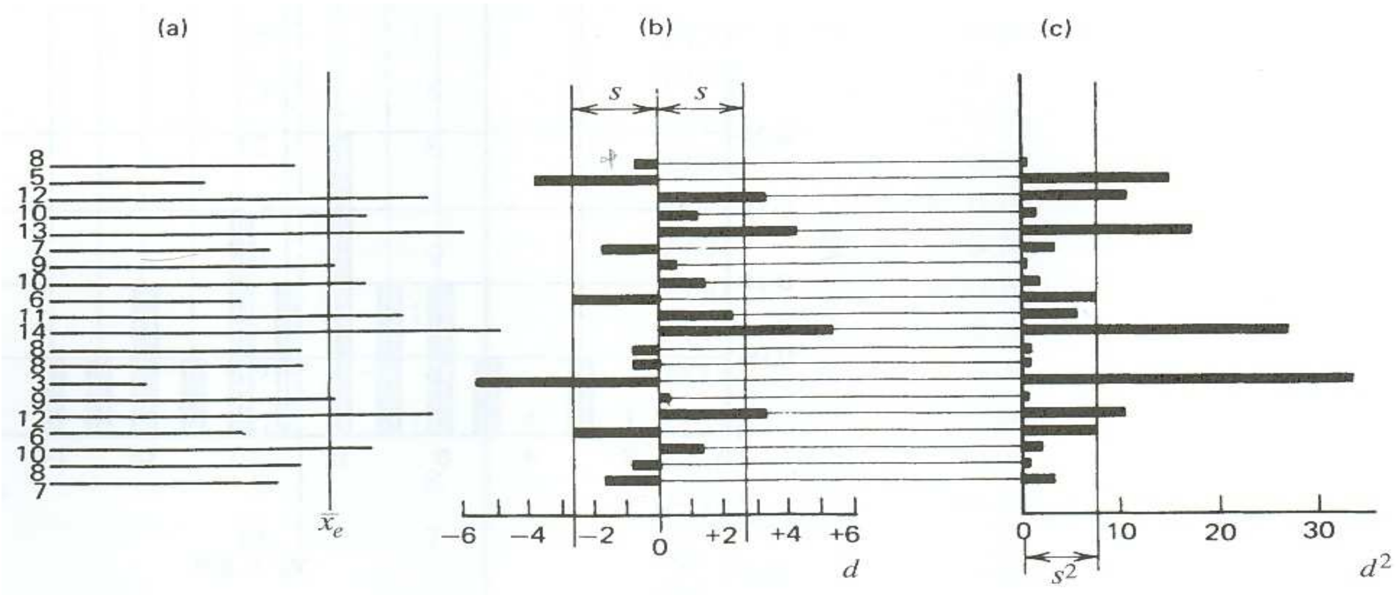
Medida efetiva da quantidade de flutuação nos dados originais,

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 F(x)}$$

média real

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_e})^2}$$

média experimental



$$d = (x_i - \bar{x}_e)$$

Modelos estatísticos

Sob certas circunstâncias é possível predizer a função de distribuição que descreveria o resultado de várias repetições de certa medição.

jogo	sucesso	Probabilidade (p)
moeda	cara	1/2
dados	6	1/6
Núcleo por tempo t	decair	$1-e^{-\lambda t}$

Modelos estatísticos

1. Distribuição Binomial: Modelo geral e aplicável aos processos de p constante. Muito incômodo computacionalmente para decaimento radioativo, devido ao elevado número de átomos.

2. Distribuição de Poisson: Simplificação da Binomial quando p é pequeno e constante. Esta condição implica em que o tempo de observação é pequeno comparado ao $t_{1/2}$.

3. Distribuição Gaussiana ou Normal: Simplificação da Poisson quando o número de sucessos for grande (>20). Modelo mais aplicado aos problemas de contagem.

Os 3 modelos se tornam idênticos para processos com p pequeno e grande número de sucessos.

Distribuição Binomial

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^{x} (1-p)^{n-x}$$

Função distribuição de probabilidade

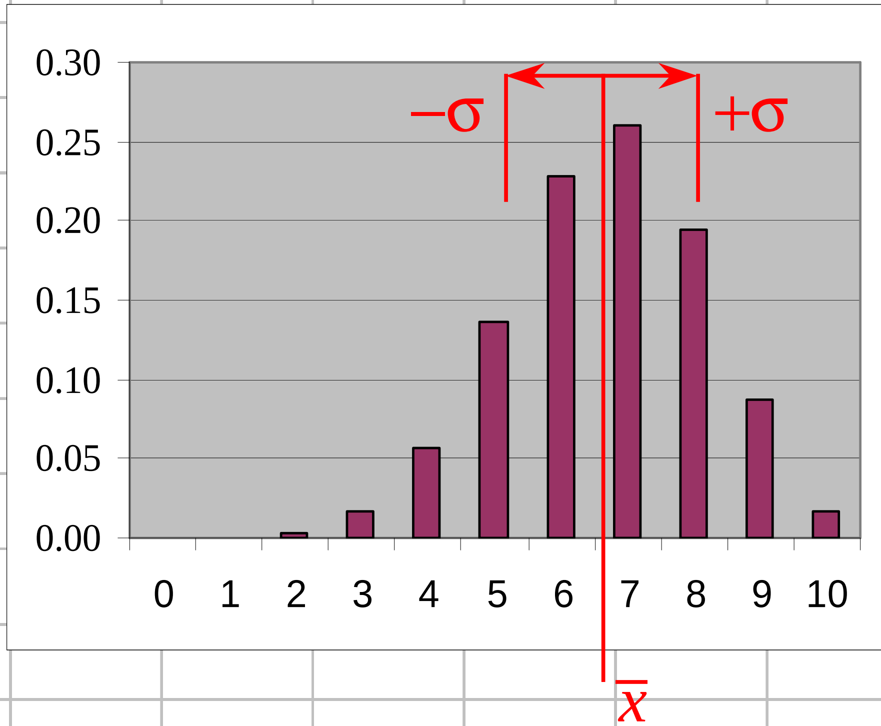
No. de tentativas

No. de sucessos

Probabilidade de sucesso em cada tentativa

Dist. Binomial - Jogar dado 10 vezes; sucesso : 3,4,5,6; p = 4/6=2/3

x	P(x)	x*P(x)	(x-méd)^2*P(x)	
0	0.00002	0.00000	0.00075	
1	0.00034	0.00034	0.01088	
2	0.00305	0.00610	0.06639	
3	0.01626	0.04877	0.21858	
4	0.05690	0.22761	0.40464	
5	0.13656	0.68282	0.37935	
6	0.22761	1.36565	0.10116	
7	0.26012	1.82086	0.02890	
8	0.19509	1.56074	0.34683	
9	0.08671	0.78037	0.47207	
10	0.01734	0.17342	0.19268	
	soma	média=Σ	σ^2	σ
	1.00000	6.66667	2.22	1.491
		n*p	méd*(1-p)	
		6.66667	2.22	



variância estim

desvio padrão

$$\bar{x} = np$$

$$\sigma^2 = \bar{x}(1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Distribuição de Poisson

Para probabilidade pequena e constante, a dist. Binomial é reduzida a:

Probabilidade de sucesso em cada tentativa

No. de tentativas

$$P(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!}$$

Função distribuição de probabilidade

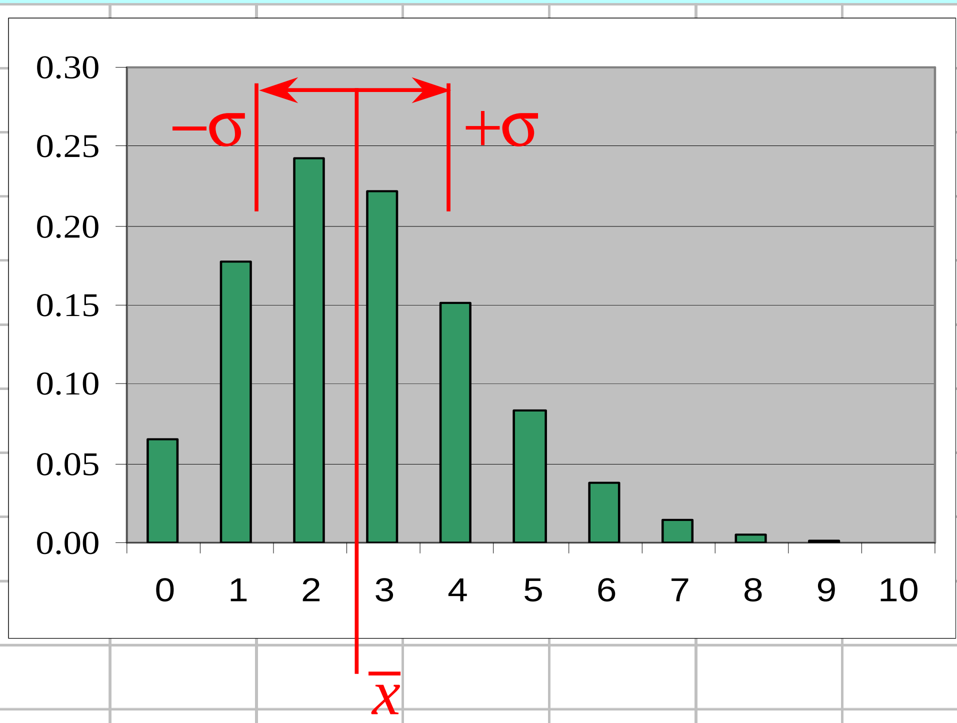
No. de sucessos

Muito útil quando é possível estimar o valor médio, mas não se sabe a probabilidade ou o tamanho da população.

$$como \quad \bar{x} = pn \Rightarrow P(x) = \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!}$$

Dist. Poisson – 1000 pessoas; sucesso: aniverssário; p=1/365

x	P(x)	x*P(x)	(x-méd)^2*P(x)	
0	0.0646	0.00000	0.48480	
1	0.1770	0.17695	0.53557	
2	0.2424	0.48480	0.13264	
3	0.2214	0.66412	0.01500	
4	0.1516	0.60650	0.24083	
5	0.0831	0.41541	0.42445	
6	0.0379	0.22762	0.40325	
7	0.0148	0.10394	0.26949	
8	0.0051	0.04068	0.14070	
9	0.0015	0.01393	0.06067	
10	0.0004	0.00424	0.02235	
11	0.00011	0.00116	0.007207	
12	2E-05	0.00029	0.002068	
13	5E-06	6.6E-05	0.000535	
14	1E-06	1.4E-05	0.000126	
	soma	média	σ^2	σ
	1.00000	2.73972	2.73969	1.66
		n*p		
		2.73973		



$$\bar{x} = np$$

$$\sigma^2 = \bar{x}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\bar{x}}$$

Distribuição Gaussiana

Para p<<1 e constante, a dist. Binomial é reduzida a Poisson;

Para p<<1 e média >20, a dist. Poisson é reduzida a Gaussiana.

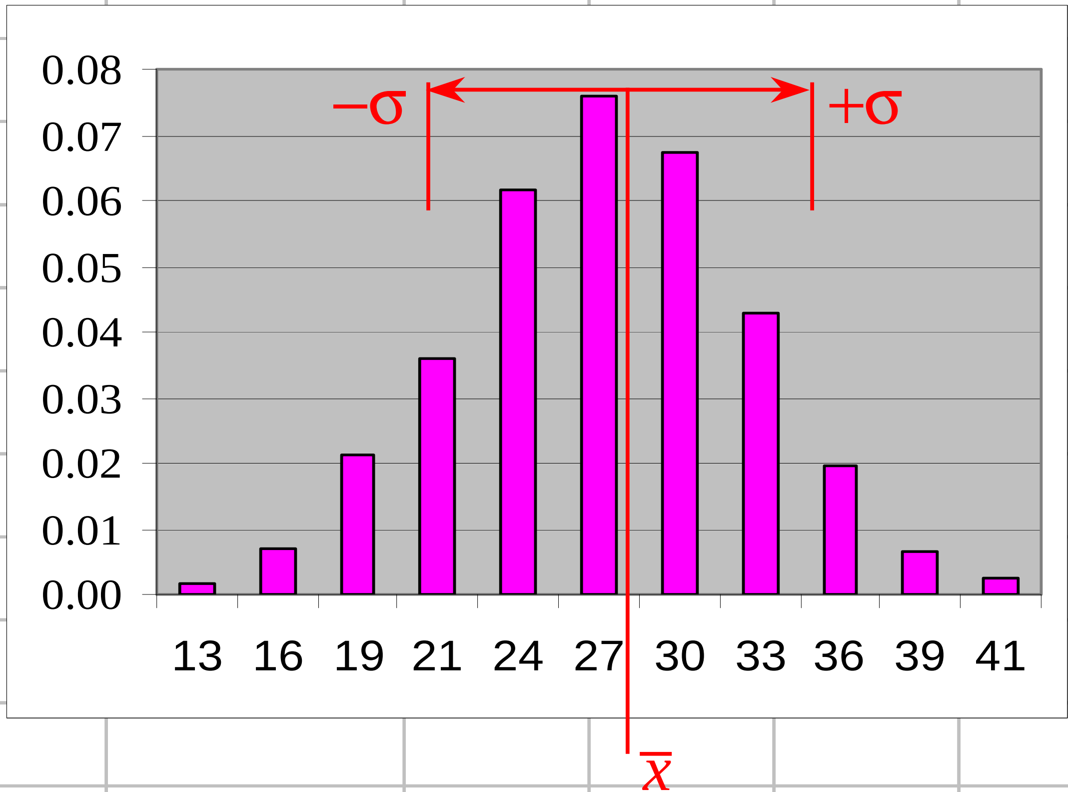
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} e^{\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}\right)}$$

Função distribuição de probabilidade

No. de sucessos

Gaussiana – 10000 pessoas; sucesso: aniversário; p=1/365

x	P(x)							
10	0.0003							
13	0.0017							
16	0.0071							
19	0.0210							
21	0.0361							
24	0.0617							
27	0.0760							
30	0.0674							
33	0.0430							
36	0.0197							
39	0.0065							
41	0.00260	média						
	soma	n*p	σ^2	σ				
	1.00000	27.3973	27.39726	5.23				

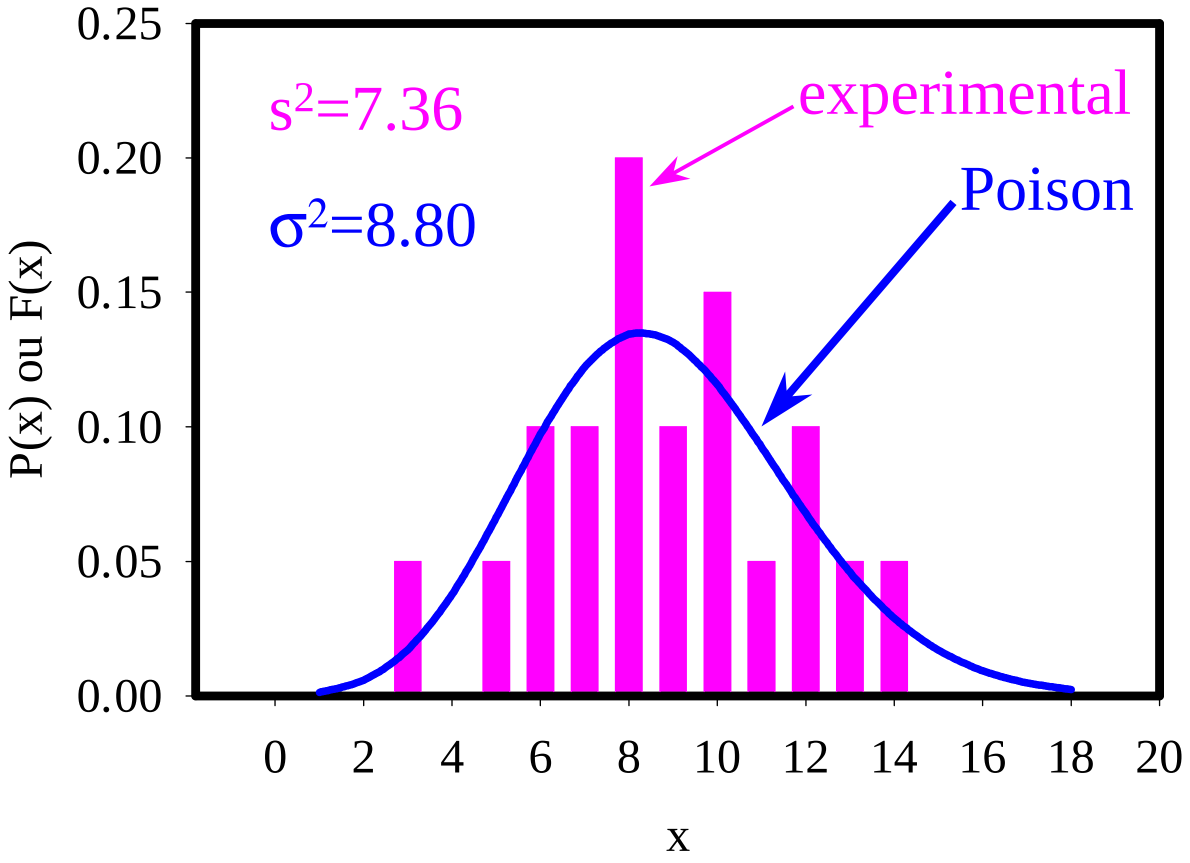


Verificação do funcionamento de equipamento

Um equipamento estará funcionando normalmente quando a distribuição dos dados experimentais estiverem em acordo com a distribuição do modelo estatístico.

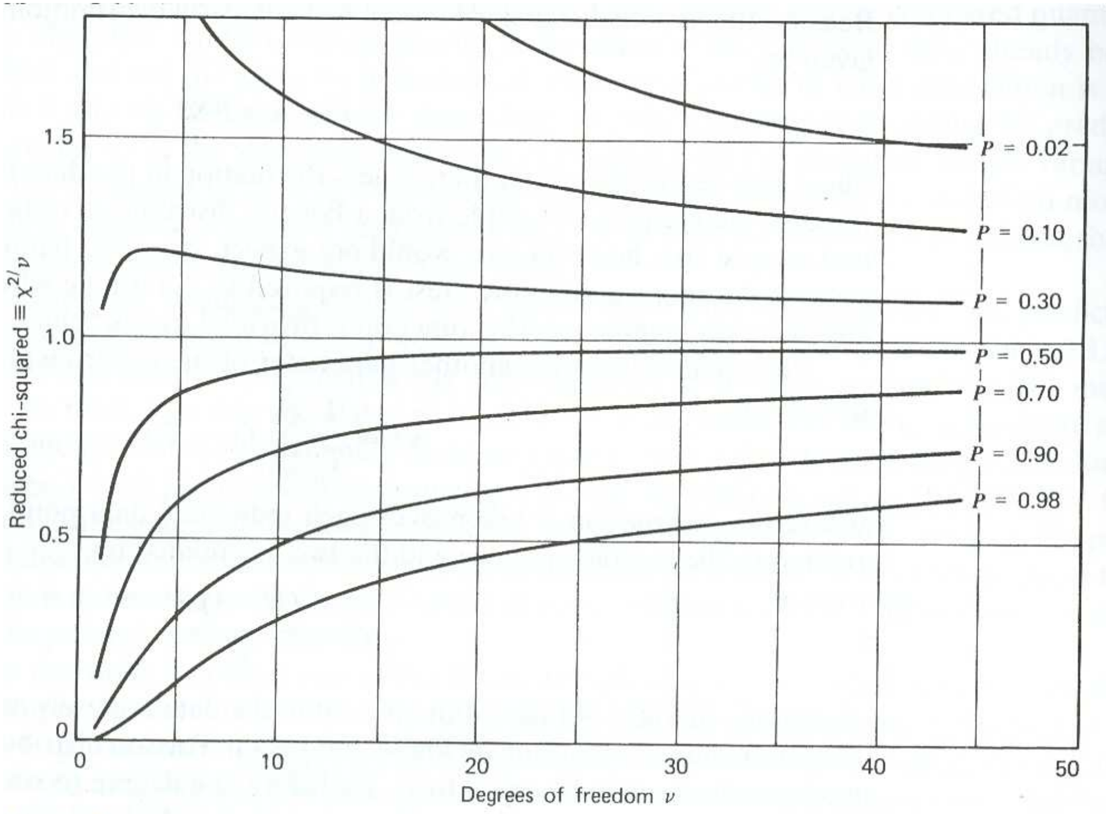
Estão suficientemente próximos?

Estão suficientemente separados?



Teste do Chi-quadrado

$$\chi^2 \equiv \frac{1}{\bar{x}_e}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_e\right)^2 = \frac{(N-1)s^2}{\bar{x}_e}$$



p<0.02 ➔ flutução anormalmente grande

p>0.98 ➔ flutuação anormalmente estreita

Estimativa da precisão de medida única

$$s^2 \cong \sigma^2 = \bar{x} \cong x \quad \therefore \quad \sqrt{s^2} \cong \sigma = \sqrt{x}$$

Exemplo: x=100 $\sigma = \sqrt{100} = 10 \quad \therefore \quad x = 100 \pm 10$

	Intervalo	Probabilidade que a média verdadeira esteja no intervalo
$x \pm 0.67\sigma$	93.3 – 106.7	50%
$x \pm \sigma$	90 – 110	68%
$x \pm 1.64\sigma$	83.6 – 116.4	90%
$x \pm 2.58\sigma$	74.2 – 125.8	99%

Somente pode ser aplicado a medida direta, antes de efetuar qualquer cálculo.

Contagem de fonte → A = 10 γ/s; ε = 100%

Tempo de contagem	Contagem	$\sigma = \sqrt{x}$	$\% = \frac{\sigma}{x}.100$
1	10	3.16	31.6
10	100	10	10
100	1000	31.6	3.16
1000	10000	100	1
10000	100000	3160	0.316
100000	1000000	1000	0.1

Propagação de erro

Equação geral: $$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots$$

Soma ou subtração de contagens:

$$u = x + y \quad ou \quad u = x - y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 1$$

$$\sigma_u^2 = (1)^2 \sigma_x^2 + (\pm 1)^2 \sigma_y^2$$

$$\boxed{\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$$

Propagação de erro

Multiplicação ou divisão de contagens:

$$u = xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$$\sigma_u^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2$$

$$dividindo\ por\ u^2 = x^2 y^2$$

$$u = x / y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$$

$$dividindo\ por\ u^2 = x^2 / y^2$$

$$\boxed{\begin{gathered}\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 \\ \sigma_u = u\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}\end{gathered}}$$

Propagação de erro

Multiplicação por constante: $$\boxed{\sigma_u = A\sigma_x}$$

Divisão por constante: $$\boxed{\sigma_u = \frac{\sigma_x}{A}}$$

Média: $$\sum = x_1 + x_2 + \ldots + x_N$$

$$\sigma_\Sigma^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \sigma_{x_N}^2$$

$$como: \quad \sigma_{x_1}^2 = x_1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\Sigma^2 = \sum$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum}{N} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{N}}}$$

Exercício

Uma amostra foi medida 100 vezes, a variância da distribuição foi de 2%. Estimar a variância para 1000 repetições.

Exercício

Indique as medidas nas quais o raiz da medida é a estimativa do desvio padrão:

a) 1 min de contagem

b) 5 min de contagem

c) Contagem líquida de 1min após subtração de bg.

d) Taxa de contagem em ctg/s baseado em 100 medidas

e) Média de 5 ctg sequenciais

f) Soma de 5 ctg sequenciais

Exercício

Os resultados a seguir foram obtidos com o mesmo detector sob as mesms condições. Aplique o teste de Chi-quadrado para verificar se estão em acordo com a distribuição de Poisson.

3626	3711	3677	3678	3465	3731	3617	3630	3624	3574
3572	3572	3615	3652	3601	3689	3578	3605	3595	3540
3625	3569	3591	3636	3629					